研究ノート

入れ替わり率の性質について

研究開発部情報処理研究部門　菊　地　賢　一

1　はじめに

いくつかのテストの合計点を用いて受験者から合格者を選抜するような場合，各テストの重み付き合計点を用いて合格者を選抜することが多い。このような選抜試験において，それぞれのテストがどれくらい選抜に関して寄与しているのかを知ることは，選抜試験を行う側にとって非常に重要な問題である。このような各テストの重要度を示すための指標はいくつかあるが，本稿では特に入れ替わり率に着目し，その理論的な性質に関して考察を行うことにする。あるテストの入れ替わり率とは，本来は合格している者の中で，もしその試験がなかったとしたら不合格となってしまう者の数の合格者数に対する割合である。すなわち，入れ替わり率はその試験があったおかげで合格できた者の割合を示していることとなり，この意味でその試験の選抜に対する寄与を表していることになる。

m個のテストx_1，…，x_mの重み付き合計点を用いて，N人の受験者からN_0人の合格者を選ぶような場合を考える。tを選抜に用いる重み付き合計点，$t_{(j)}$をj番目のテストを除いた合計点とし，

$$t=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i$$

$$t_{(j)}=\sum_{i=1}^{j-1}\alpha_i x_i+\sum_{i=j+1}^{m}\alpha_i x_i$$

と表す。ただし，α_iは合計点を計算するためのi番目のテストの重みとする。このtと$t_{(j)}$を用いると，j番目のテストx_jの入れ替わり率は，tで選抜を行った場合は合格するけれども，$t_{(j)}$では不合格となる者の数のN_0に対する割合となる。

この入れ替わり率は，直観的にわかりやすい上，国立大学入学者選抜研究連絡協議会におけるセミナーでの紹介（林，1997）や研究プロジェクト（清水・菊地，1997）として取り上げられていることなどの影響もあり，近年多くの応用研究がなされている（例えば，豊田，1995，柳井・鈴木，1997）。また，

2段階選抜を行う場合のいわゆる足切り倍率を決定するという観点から行われた研究(熊本他，1988，矢野他，1990)などとも関連している。理論的には，Kikuchi & Mayekawa(1995)，前川・菊地(1996)，Kikuchi(1996)，Kikuchi(1997)において，その統計的性質が論じられている。

本稿では，2節で得点に正規分布を仮定した場合の入れ替わり率の理論的な性質を論じるとともに，3節で入れ替わり率の測定誤差の推定とその利用法について考察を行うこととする。

2 入れ替わり率の性質

本節では，テスト得点に多変量正規分布を仮定した場合の入れ替わり率の性質について議論する。テスト得点$(x_1, \cdots, x_m)$が平均$\{\mu_j\}$，分散共分散行列$\{\sigma_{jj}\}$の多変量正規分布に従うとし，xとyをそれぞれtと$t_{(i)}$を標準化した得点，

$$x=(t-\sum_{k}\alpha_k\mu_k)/\sqrt{\sum_{k,l}\alpha_k\alpha_l\sigma_{kl}}$$

$$y=(t_{(j)}-\sum_{k\neq j}\alpha_k\mu_k)/\sqrt{\sum_{k,l\neq j}\alpha_k\alpha_l\sigma_{kl}}$$

とする。このようにおくと，x，yは相関係数

$$\rho=(1+\alpha\rho^*)/\sqrt{\alpha^2+2\ \alpha\rho^*+1}$$

の標準正規分布に従う。ただし，

$$\alpha=\alpha_j\sqrt{\sigma_{jj}}/\sqrt{\sum_{k,l\neq j}\alpha_k\alpha_l\sigma_{kl}}$$

$$\rho^*=(\sum_{k\neq j}\alpha_k\sigma_{jk})/(\sqrt{\sigma_{jj}}\sqrt{\sum_{k,l\neq j}\alpha_k\alpha_l\sigma_{kl}})$$

であり，αはx_jの相対重み，すなわち$\alpha_j x_j$と$t_{(j)}$の標準偏差の比を表し，ρ^*はx_jと$t_{(j)}$の相関係数を表している。このように考えると，多数のテストがある場合でも入れ替わり率は，標準2変量正規分布の問題に帰着され，x_jの入れ替わり率はxでは合格するけれどもyでは不合格となる者の割合と考えることができる(図1の網かけ部分)。

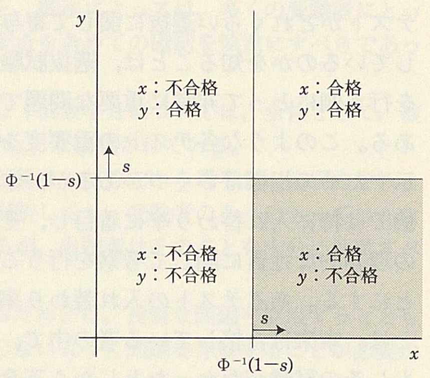

図1：正規分布を仮定した場合の母入れ替わり率

このような場合，合格率をs $(=N_0/N)$とすると，母入れ替わり率θは，

$$\theta=\frac{\Pr(y<\Phi^{-1}(1-s)\&x\geq\Phi^{-1}(1-s))}{s}$$

$$=\frac{s-\Pr(y\geq\Phi^{-1}(1-s)\&x\geq\Phi^{-1}(1-s))}{s}$$

$$=1-\frac{L(\Phi^{-1}(1-s),\Phi^{-1}(1-s);\rho)}{s}$$

と表せる。ただし，$\Phi(\cdot)$は標準正規分布の分布関数を表し，$L(x,y;\rho)$は相関係数ρの標準2変量正規分布における点(x,y)の上側確率を表す。よって，母入れ替わり率θは合格率sと相関係数ρだけの関数で表すことができる。

このような入れ替わり率の表現を使って，Kikuchi(1996)は解析的に以下のことを示している。特殊な場合を除き，母入れ替わり率θは，x_jと$t_{(j)}$の相関係数ρ^*に関して単調減少し，x_jの重みα_jに関しては単調増加し，合格率sに関しては単調減少する。すなわち，入れ替わり率を求めたいテストと他のテストとの関係が強いほど入れ替わり率は小さく，重みを大きくすればするほど入れ替わり率でみたその試験の選抜に対する寄与が高くなるということになる。合格率sに関する性質は，受験倍率$(1/s=N/N_0)$が高いほど入れ替わり率が大きくなるという実際のデータからの結果(清水・菊地，1997)を裏付けるものである。また，合格率sに関する母入れ替わり率θの極限値は，

$$\lim_{s\to 1}\theta=0$$

$$\lim_{s\to 0}\theta=1$$

となることが示されている。この結果から，合格率が上がる，すなわち倍率が下がるほど，入れ替わり率は0に近づき，合格率が下がる，すなわち倍率が上がるほど，入れ替わり率は1に近づくことがわかる。

3 入れ替わり率の誤差の推定とその利用法

実際のデータから，入れ替わり率を計算する方法は，tと$t_{(j)}$の順にデータを並べ直し合格者を選抜するという非常に単純な計算である。このため入れ替わり率の測定誤差は一見大きいもののように思われる。そこで本節では，以下のように入れ替わり率の標準誤差(測定誤差)について考察を行う。実際のデータ解析では観測されたN人のデータ(標本)を1組用いて標本入れ替わり率の値が1つ計算されるが，仮に同じ受験者層(母集団)から何度もN人の受験者を選び出して選抜試験を行った場合に計算される標本入れ替わり率の値にどれくらいの幅(誤差)があるのかを推定しようとする試みである。

3.1　標準誤差の近似法

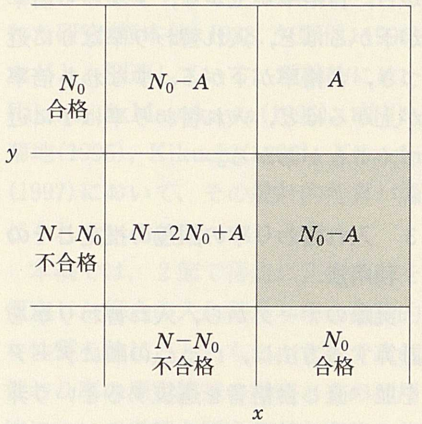

図2：2×2の分割表と考えた場合の入れ替わり率

xとyでの合否の状況を図2のように考えてみると，行和と列和に制約のある2×2の分割表と考えることができる。xとyの両方で合格する人数をAとすると標本入れ替わり率rは，

$$r=(N_0-A)/N_0$$

となる。このようなAはExtended Hypergeometric Distribution (EHGD)という分布に従うことが知られている(Harkness, 1965, Johnson他，1992，p279-282)。ただし，入れ替わり率の場合，分割表のそれぞれのセルの生起確率がテスト得点の順序統計量によって決まる合格ラインと得点の分布に依存するため，EHGDの標準誤差をそのまま入れ替わり率の標準誤差とすることはできない。Kikuchi (1996)は，EHGDと順序統計量の性質を利用して標本数Nが十分大きい時には，標本入れ替わり率rの標準誤差SEが次の式で近似できることを示している。

$$SE \approx \sqrt{\left(\frac{1}{s(1-r)}+\frac{2}{sr}+\frac{1}{1-s(1+r)}\right)^{-1}\times\frac{1}{sN_0}}$$

この近似式は，合格者数N_0，合格率s，そのデータから計算された標本入れ替わり率rの値だけで計算が可能である。従来，入れ替わり率の誤差の評価はシミュレーションでしか行うことができなかった。しかし，この式を用いることにより，容易に入れ替わり率の測定誤差の評価が可能となる。計算された誤差の利用法については次節で例をあげる。また，入れ替わり率の測定誤差の大きさは，直観的な予想に反して実際の場面で利用する際に問題ない程度に小さいことが確かめられている(Kikuchi & Mayekawa, 1995)。

3.2　測定誤差の利用法

前節の入れ替わり率の誤差の近似式を利用して信頼区間を構成することを考える。標本入れ替わり率をr，その標準誤差をSEとすると，95%信頼区間は，

$$r\pm1.96\times SE$$

となる（前川・菊地，1996）。

この95%信頼区間の解釈であるが，例えばある募集単位において選抜試験の制度の変更がなく，前回と同じ受験者層の受験者が選抜試験を受験したとする。このような場合に計算された入れ替わり率は，前回の選抜試験のデータから計算した信頼区間に95%の確率で入ると解釈できる。逆に，選抜試験の制度の変更などを行っていないにも関わらず，その年の入れ替わり率が前年度の信頼区間に入らなかった場合には，選抜試験の性質（受験者層等）に何らかの変化があった可能性を示唆している。すなわちこの信頼区間を用いると，入れ替わり率を各テストの選抜に対する寄与を表す指標としてだけではなく，選抜試験の性質の変化を検出するためにも利用することが可能となる。

4　まとめ

本稿では，2節で得点に正規分布を仮定した場合の入れ替わり率の理論的な性質を論じるとともに，3節で入れ替わり率の測定誤差の近似とその利用法について考察を行った。2節では，実際のデータから得られた入れ替わり率の性質の理論的裏付けを行った。3節では入れ替わり率の測定誤差について検討したが，その誤差は合格者数，合格率，入れ替わり率の値だけで近似式により計算でき，誤差の大きさは実際の場面で利用する際に問題ない程度に小さいことがわかった。また，この近似式を利用して計算できる信頼区間を用いると，入れ替わり率をある試験の選抜に対する寄与を表す指標としてだけではなく，選抜試験の性質そのものの評価のために用いることも可能である。なお，詳しくはKikuchi(1997)にまとめられている。

参考文献

1）熊本芳朗・石塚智一・山田文康(1988) 2変量正規分布の理論による適正足切り倍率のシミュレーション研究，大学入試フォーラム，No.10, p182-194

2）清水留三郎・菊地賢一(1997)入学者選抜における試験の効果の評価－合否入替り率を中心に－(第4報)，国立大学入学者選抜研究連絡協議会第18回大会研究発表予稿集，p1-5

3）豊田秀樹(1995)入研協共同研究の合否入れ替り率に関する日程別の特徴について，大学入試研究ジャーナル，第5号，p119-123

4）林篤裕(1997)合否入替り率，国立大学入学者選抜研究連絡協議会第18回大会セミナー資料，入試研究の基礎知識，p35-41

5）前川眞一・菊地賢一(1996)合否入れ替わり率のブートストラップ法によ

る区間推定，大学入試センター研究紀要，No.24，p1-11

6）柳井晴夫・鈴木規夫(1997)平成6、7、8年度の合否入替り率の分析，国立大学入学者選抜研究連絡協議会第18回大会研究発表予稿集，p6-9

7）矢野一幸・大内俊二・田栗正章(1990)大学入試における予備選抜倍率についての検討，行動計量学，第17巻，第2号，p25-33

8）Harkness，W.L.(1965). Properties of the extended hypergeometric distribution. Annals of Mathematical Statistics，36，p938-945.

9）Johnson，N.L.，Kotz，S.，& Kemp，A.W.（1992）. Univariate Discrete Distributions（2nd ed.）. New York: Wiley.

10）Kikuchi，K.（1996）. Analytic approximation to the standard error of swap-rate. Behaviormetrika，23，No.2，p187-203.

11）Kikuchi，K.（1997）. Statistical Properties of Some Measures for Evaluating the Contribution of a Subtest. 東京工業大学平成8年度学位論文

12）Kikuchi，K.，& Mayekawa，S.（1995）. On the sampling distribution of swap-rate. Behaviormetrika，22，No.2，p185-204.